

ENIGMATH 2003

<http://www.enigmath.org>

Ce texte a été envoyé à tous les participants ,

Vous trouverez ci-dessous les réponses aux 6 questions d'Enigmath 2003. Vous pouvez aussi consulter la page web

<http://www.enigmath.org>

Pour chaque question, nous rappelons l'énoncé, votre réponse, puis nous donnons la solution en l'expliquant et tentons en quelques phrases de mettre en évidence un lien avec des théories mathématiques plus élaborées. Les démonstrations proposées ne se veulent pas optimales mais utilisent des techniques élémentaires : il existe souvent des méthodes plus rapides utilisant des outils mathématiques sophistiqués.

Si vous ne comprenez pas certains passages, n'hésitez pas à demander des explications à votre Professeur de Mathématiques !

Pour utiliser ce document de manière optimale, sachez que les adresses internet sont « cliquables » dans le fichier PDF que vous êtes en train de lire. Ces adresses ont été vérifiées au moment de la clôture du jeu, mais il est possible que certains sites aient été déplacés. Nous tâcherons d'en indiquer les nouvelles adresses sur le site

<http://www.enigmath.org>

Question 1 : spectacle de danse.

Énoncé.

Une classe de 33 élèves prépare un spectacle de danse. Le jour de la représentation, plusieurs enfants ont la grippe et sont absents. La première danse est une ronde où les enfants sont groupés par 7, et 5 enfants restent spectateurs. La deuxième danse est un quadrille (les enfants sont groupés par 4) et 2 enfants ne dansent pas.

Combien d'enfants sont malades ?

7.

La solution est : 7.

Quelques explications.

Appelons N le nombre d'enfants présents lors de la représentation ; ce nombre est inférieur ou égal à 33. Appelons G le nombre de groupes de 7 enfants qui peuvent être formés ; ce nombre est inférieur à 5, puisque $5 \times 7 = 35$ est strictement supérieur à 33, nombre total d'enfants dans la classe. D'après la première indication, le nombre d'enfants présents est un multiple de 7 augmenté de 5, ce qui s'exprime mathématiquement par l'égalité $N = 7 \times G + 5$.

Dans le tableau ci-dessous on donne, pour chaque valeur possible du nombre de groupes, G , le nombre d'enfants $N = 7 \times G + 5$ ainsi que, dans la colonne de droite, le reste de la division de ce nombre par 4 (afin de tenir compte, dans la suite de cette explication, de la deuxième indication de l'énoncé).

G	$N = 7 \times G + 5$	Reste de la division de N par 4
0	5	1 (car $5 = 4 \times 1 + 1$)
1	12	0 (car $12 = 4 \times 3 + 0$)
2	19	3 (car $19 = 4 \times 4 + 3$)
3	26	2 (car $26 = 4 \times 6 + 2$)
4	33	1 (car $33 = 4 \times 8 + 1$)

D'après la deuxième indication, le reste de la division du nombre N d'enfants par 4 est égal à 2. On cherche donc, dans le tableau ci-dessus, le nombre G (première colonne) pour lequel le chiffre correspondant situé dans la troisième colonne est 2. On remarque que la seule solution est celle qui correspond à $G = 3$: il y avait trois groupes de 7 enfants. On a ainsi démontré que le nombre d'enfants présents lors de la représentation, $N = 7 \times G + 5$, vaut $7 \times 3 + 5 = 26$.

Comme la classe compte 33 élèves, il y a $33 - 26 = 7$ enfants malades.

Pour aller plus loin.

Le raisonnement présenté ci-dessus est un raisonnement par « tâtonnement », ou par essais successifs. En fait, il existe une méthode mathématique directe pour trouver à coup sûr la solution dans ce type de problème. Cette méthode est néanmoins complexe et il est impossible de la décrire dans ces quelques lignes. Un théorème mathématique relativement simple permet déjà d'affirmer avec certitude qu'il existe une unique solution au problème, ce qui est déjà très rassurant !

Un résultat mathématique général garantit en effet que si l'on se donne p entiers notés a_1, a_2, \dots, a_p tous strictement positifs et deux à deux premiers entre eux (c'est-à-dire que leur seul diviseur entier commun est 1) et p entiers appelés b_1, b_2, \dots, b_p , tels que $a_i > b_i \geq 0$, il existe un unique nombre N inférieur au produit $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_p$ et qui a b_1 pour reste de la division entière par a_1 , b_2 pour reste de la division entière par a_2 , etc.

Ce résultat est connu sous le nom de *théorème chinois des restes*.

Dans le cas de la question 1, deux nombres entiers premiers entre eux sont donnés : $a_1 = 7$ et $a_2 = 4$. Deux autres nombres entiers sont fournis : $b_1 = 5$ et $b_2 = 2$. Le théorème chinois des restes assure qu'il existe un unique nombre N inférieur ou égal à $a_1 \times a_2 = 4 \times 7 = 28$ ayant 5 pour reste de la division entière par 7 et 2 pour reste de la division entière par 4. Nous avons trouvé par tâtonnement que ce nombre était 26.

Le théorème chinois des restes est un résultat d'algèbre d'existence et d'unicité. Dans certains cas, on peut trouver des méthodes astucieuses pour trouver directement la solution. En voici un exemple qui nous a été indiqué sur l'un des stands de la fête de la science (son auteur se reconnaîtra et nous le remercions). Il peut se formuler dans les mêmes termes : une troupe est composée de moins de 100 danseurs. Lorsque les danseurs se regroupent de 3, il en reste 2, lorsqu'ils se regroupent par 4, il en reste 3, et il reste 4 danseurs s'ils sont rangés par groupes de 5. Quel est le nombre de danseurs dans la troupe ?¹

Question 2 : un « tour de magie ».

Énoncé.

Au cours d'un spectacle de magie, le magicien fait monter sur scène deux enfants. Il leur demande d'écrire le produit de leurs âges sur une ardoise. Ils inscrivent 84. Il leur demande ensuite d'en écrire la somme : ils écrivent 19. Le magicien annonce alors l'âge de l'aîné.

Quel est cet âge ?

12 ans.

La solution est : 12 ans.

Quelques explications.

Bien sûr, trouver l'âge de l'aîné est équivalent à trouver les deux âges (si l'on a trouvé l'un des deux, il suffit de le soustraire à 19 pour connaître l'autre). D'après l'énoncé, le magicien doit donc trouver deux nombres entiers X et Y , tels que leur produit, $X \times Y$, soit 84 et leur somme, $X + Y$, soit 19. Plus précisément, appelons X l'âge de l'aîné. Procédons tout d'abord, comme pour la question 1, par tâtonnement. Puisque $X + Y = 19$, les valeurs possibles sont $X = 19$ et $Y = 0$, $X = 18$ et $Y = 1$, etc. Toutes ces possibilités sont répertoriées dans le tableau ci-dessous, dans la colonne de droite duquel nous avons inscrit le produit $X \times Y$ correspondant.

¹ Solution : s'il y avait un danseur de plus, le nombre de danseurs serait un multiple de 3, de 4 et de 5, qui sont premiers entre eux ; il serait donc un multiple de $3 \times 4 \times 5 = 60$. Le nombre de danseurs est donc un multiple de 60 moins 1 et la seule solution inférieure à 100 est 59.

Âge de l'aîné (X) et du puîné (Y)	Produit de leurs âges
$X = 19, Y = 0$	$X \times Y = 0$
$X = 18, Y = 1$	$X \times Y = 18$
$X = 17, Y = 2$	$X \times Y = 34$
$X = 16, Y = 3$	$X \times Y = 48$
$X = 15, Y = 4$	$X \times Y = 60$
$X = 14, Y = 5$	$X \times Y = 70$
$X = 13, Y = 6$	$X \times Y = 78$
$X = 12, Y = 7$	$X \times Y = 84$
$X = 11, Y = 8$	$X \times Y = 88$
$X = 10, Y = 9$	$X \times Y = 90$

Nous constatons alors dans la colonne de droite qu'un seul couple de nombres (X, Y) a pour produit 84 : il s'agit du couple (12, 7). L'âge de l'aîné est donc forcément 12 ans.

On aurait pu procéder aussi en considérant tous les couples d'entiers (X, Y) dont le produit est 84 : les possibilités sont

$$(84, 1), (42, 2), (28, 3), (21, 4), (14, 6), (12, 7)$$

(cela est lié à la décomposition en facteurs premiers de $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ et aux différentes manières de combiner ces nombres 2, 2, 3, 7). Pour chaque couple, on considère ensuite la somme associée : soit, dans le même ordre,

$$85, 44, 31, 25, 20, 19.$$

On remarque qu'il n'y a que le couple (X, Y) = (7, 12) satisfaisant les deux contraintes. L'âge de l'aîné est donc 12 ans.

Pour aller plus loin.

Le raisonnement ci-dessus consiste à nouveau à essayer toutes les possibilités, et à utiliser quelques notions sur les diviseurs. Il s'agit donc d'une méthode que l'on pourrait dire « arithmétique ». On pourrait avoir l'impression que les mathématiques ne consistent qu'à essayer toutes les combinaisons : il n'en est rien !

En effet, il existe une méthode générale (que l'on pourrait qualifier d'algébrique) qui permet de résoudre ce type de problèmes directement et de déterminer la solution, sans tâtonnement. Pour résoudre la question posée, il faut trouver, en gardant les notations introduites ci-dessus, deux entiers X et Y positifs (vérifiant $X \geq Y$) tels que

$$\begin{cases} X + Y = 19, \\ X \times Y = 84. \end{cases}$$

La première équation donne $Y = 19 - X$ et l'on peut remplacer, dans la deuxième, Y par $19 - X$. Le problème se résume donc à trouver un entier positif X tel que $X \times (19 - X) = 84$, soit encore

$$X^2 - 19 \times X + 84 = 0. \tag{1}$$

Or

$$\left(X - \frac{19}{2}\right)^2 = \left(X - \frac{19}{2}\right) \times \left(X - \frac{19}{2}\right) = X^2 - 19 \times X + \frac{19^2}{2^2},$$

d'où l'on obtient que

$$X^2 - 19 \times X + 84 = \left(X - \frac{19}{2}\right)^2 - \frac{19^2}{4} + 84 = \left(X - \frac{19}{2}\right)^2 - \frac{361 - 336}{4} = \left(X - \frac{19}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}.$$

L'équation à résoudre est donc

$$\left(X - \frac{19}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0.$$

Il suffit maintenant de constater que

$$\left(X - \frac{19}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(\left(X - \frac{19}{2} + \frac{5}{2}\right)\right) \times \left(\left(X - \frac{19}{2} - \frac{5}{2}\right)\right) = (X - 7) \times (X - 12)$$

pour comprendre que l'âge de l'aîné, X , est un entier qui est solution de l'équation

$$(X - 7) \times (X - 12) = 0.$$

Cette équation admet deux solutions, qui sont évidemment 7 et 12. Si $X = 7$, on aura $Y = 19 - 7 = 12$, et si $X = 12$, $Y = 19 - 12 = 7$. Comme X est supérieur ou égal à Y , la solution est $X = 12$. L'aîné a donc 12 ans.

La méthode que nous avons employée ici est constructive : elle permet de trouver la solution du problème sans avoir à essayer toutes les combinaisons possibles. L'équation (1) est une *équation polynomiale du second degré*. Pour une équation polynomiale du second degré générale du type $a \times X^2 + b \times X + c$, où a, b, c sont des coefficients réels quelconques (dans le cas de la question 2, on avait $a = 1, b = -19$ et $c = 84$), la méthode que nous avons utilisée conduirait à une formule générale donnant ses solutions (qui ne seraient bien sûr pas forcément des entiers) en fonction des coefficients a, b et c :

$$X = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2 \times a} \quad \text{et} \quad X = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2 \times a}.$$

La résolution des équations polynomiales du second degré était connue des mathématiciens grecs anciens. Les équations polynomiales des troisième et quatrième degrés furent résolues par des italiens (Cardan, Ferrari) au 16ème siècle. Il n'existe pas de telles méthodes constructives pour les équations de degrés 5 et plus : il est même démontré que jamais une formule générale ne pourra être établie. Ceci résulte des travaux de Galois et d'Abel au début du 19ème siècle. Cette impossibilité a nécessité le développement de nombreux outils nouveaux en théorie des groupes ou sur les fonctions elliptiques qui ont eu, par la suite, des développements inattendus.

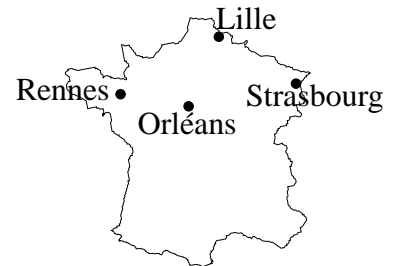
Afin de pallier l'absence d'un prix Nobel de mathématiques, le gouvernement norvégien a créé en 2002 le *prix Abel* à l'occasion du bicentenaire de la naissance (5 août 1802) du mathématicien. Il concurrence ainsi la médaille Fields qui est accordée tous les quatre ans à des jeunes mathématiciens (âgés de moins de 40 ans). Ce prix a été décerné pour la première fois le 3 avril 2003, au mathématicien français Jean-Pierre Serre pour ses travaux en géométrie algébrique.

Question 3 : le voyageur.

Énoncé.

Un voyageur se trouve à Orléans. Il doit visiter les villes de Strasbourg, Rennes et Lille dans n'importe quel ordre avant de revenir à Orléans. On donne les six distances routières approximatives séparant les quatre villes en question :

Orléans-Lille : 354 km	Orléans-Strasbourg : 614 km
Orléans-Rennes : 291 km	Lille-Strasbourg : 526 km
Lille-Rennes : 569 km	Strasbourg-Rennes : 830 km



Quelle est la distance minimale qu'il parcourra ?
2000 km.

La solution est : 2000 km.

Quelques explications.

Le voyageur part d'Orléans et doit y revenir. Les trajets qu'il peut effectuer sont :

- 1) Orléans-Lille-Rennes-Strasbourg-Orléans,
- 2) Orléans-Lille-Strasbourg-Rennes-Orléans,
- 3) Orléans-Rennes-Lille-Strasbourg-Orléans,
- 4) Orléans-Rennes-Strasbourg-Lille-Orléans,
- 5) Orléans-Strasbourg-Rennes-Lille-Orléans,
- 6) Orléans-Strasbourg-Lille-Rennes-Orléans.

(Dans ce décompte des trajets possibles, nous avons bien entendu écarté tous les trajets faisant passer le voyageur deux fois dans la même ville, ces trajets n'étant pas optimaux). Nous pouvons de plus remarquer que le trajet

5) Orléans-Strasbourg-Rennes-Lille-Orléans

est le même (en sens inverse) que

1) Orléans-Lille-Rennes-Strasbourg-Orléans,

donc nous pouvons éliminer le trajet 5) au profit du 1). De même, nous éliminons 6) au profit de 3) et 4) au profit de 2).

Il reste donc trois trajets possibles. Il suffit de faire le calcul des kilomètres parcourus sur chacun de ces trajets pour décider. On vérifie aisément que
la distance totale parcourue sur le trajet 1) est 2367 km,
la distance totale parcourue sur le trajet 2) est 2001 km,
la distance totale parcourue sur le trajet 3) est 2000 km.

Le voyageur sera donc obligé de parcourir 2000 km au moins lors de son périple. Il parcourra exactement 2000 km s'il suit le trajet Orléans-Rennes-Lille-Strasbourg-Orléans (ou, symétriquement, Orléans-Strasbourg-Lille-Rennes-Orléans).

Nous tenons à signaler que de nombreuses erreurs venaient de l'oubli du trajet de retour à Orléans : il est toujours important de bien lire les énoncés.

Nous remarquons que le trajet le plus court est celui qui connecte les villes sans couper par le milieu : attention, ce n'est pas toujours le cas (voir « Pour aller plus loin »).

Pour aller plus loin.

Ce problème (dans un cadre plus général, avec un nombre quelconque de villes) est connu en mathématiques sous le nom de « problème du voyageur de commerce ».

Les mathématiciens ont prouvé que l'itinéraire optimal visite les villes de l'enveloppe convexe (le plus petit polygone convexe qui contienne tous les villes) dans l'ordre où on les rencontre sur cette enveloppe, si les routes entre les villes sont supposées des lignes droites.

Nous ne sommes pas, dans la question 3, dans cette situation idéale, puisque les distances entre les villes ne sont pas des distances à vol d'oiseau : les quatre villes représentées sur la carte de France forment un quadrilatère convexe, mais les routes qui les joignent ne sont pas rectilignes... Ce dessin aurait pu être trompeur : si par exemple on construisait une route plus courte de 2 km entre Orléans et Lille (longue de 352 km au lieu de 254 km), le trajet le plus court ne serait plus celui qui visite les villes dans l'ordre où on les rencontre sur l'enveloppe convexe, mais le deuxième :

- 1) Orléans-Lille-Rennes-Strasbourg-Orléans, 2367 km,
- 2) Orléans-Lille-Strasbourg-Rennes-Orléans, 1999 km,
- 3) Orléans-Rennes-Lille-Strasbourg-Orléans, 2000 km.

Il n'existe pas à l'heure actuelle de méthode exacte et utilisable de manière réaliste dès que le nombre de villes est important, car les méthodes exactes reviennent à passer en revue tous les itinéraires. Le problème du voyageur de commerce est un des grands classiques pour les mathématiciens et les informaticiens dans le domaine de l'optimisation. Lorsque l'on augmente le nombre de villes que doit traverser le voyageur, le nombre d'itinéraires devient rapidement gigantesque. Appelons n le nombre de villes-étapes de notre voyageur. Pour son premier déplacement, il a le choix de $n - 1$ destinations (toutes les villes sauf celle d'où il part). Il aura ensuite $n - 2$ possibilités quant à son deuxième déplacement (toutes les villes sauf sa ville de départ et la première ville où il aura fait étape). Il en va de même pour les déplacements suivants, de sorte qu'au total, il a $(n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times 2$ trajets possibles. Ce nombre est noté $(n - 1)!$ en mathématiques (prononcer « factorielle $n - 1$ »). On peut ici encore faire la remarque utilisée dans la réponse à la question 3 : nous avons dans cette énumération compté deux fois chaque trajet (le trajet et le trajet en sens inverse), on peut donc diviser par 2 le nombre de trajets possibles. Celui-ci est donc

$$\frac{(n - 1)!}{2}$$

(on vérifie que lorsque $n = 4$, on retrouve $\frac{3 \times 2}{2} = 3$, ce que l'on a trouvé dans le cas particulier de la question 3)).

Pour $n = 10$, ce nombre vaut 181440.

Pour $n = 15$, il s'élève à 43589145600.

Pour $n = 100$, le nombre d'itinéraires s'écrit avec 156 chiffres !

Pour 5 villes, le temps de calcul sur un ordinateur actuel nécessaire à l'obtention de la solution exacte est de l'ordre de quelques microsecondes. Pour 25 villes, ce temps de calcul avoisine les 10 milliards d'années. Il faut 12 heures pour explorer tous les trajets passant par 15 villes.

Les mathématiciens et informaticiens ont donc imaginé de nombreux algorithmes produisant en un temps raisonnable un circuit « assez » court (mais pas nécessairement le plus court !), et cela même lorsqu'il y a plusieurs milliers de villes. Il existe des méthodes déterministes et des méthodes aléatoires ; vous pouvez pour en savoir plus consulter les sites :

<http://home.alex.tuxfamily.org/pvc/algo/algoalgorithmes.html>

<http://j.mochel.free.fr/commerce.php>

(avec une applet java, utilise la méthode du recuit simulé (aléatoire))

<http://www.renard.org/iva/ag.html>

(avec une applet java et des algorithmes génétiques).

Si vous préférez le papier, vous pouvez consulter le livre de M. Bergounioux, *Optimisation et contrôle*, éditions Dunod, 2002, dans lequel sont expliquées les méthodes mathématiques habituellement appliquées en *recherche opérationnelle* (c'est le nom de la discipline).

Le problème du voyageur du commerce est un problème du type *NP*, c'est-à-dire que la vérification du fait qu'une proposition de solution est ou n'est pas solution peut être effectuée au moyen d'un algorithme impliquant un nombre d'opérations élémentaires qui est une fonction *polynomiale* du nombre de paramètres du problème (ici, le nombre de villes à traverser). Le mot *polynomiale* est employé par opposition à *exponentielle* ou *factorielle* pour préciser que ce nombre d'opérations n'augmente pas « trop » vite avec le nombre de paramètres. Il existe en effet des algorithmes polynomiaux qui permettent de vérifier que tel trajet est ou n'est pas optimal. Cependant, comme nous l'avons déjà indiqué, aucun algorithme polynomial n'est actuellement connu pour *trouver* la solution. Ce n'est pas en contradiction avec le fait que le problème soit *NP* : on possède des algorithmes polynomiaux pour vérifier qu'un trajet est optimal ou non, mais le nombre de trajets possibles est *factoriel*... Un autre exemple de problème *NP* pour lequel on ne connaît pas d'algorithme de résolution polynomial est le jeu du démineur.

Une conjecture mathématique actuelle stipule que « $P \neq NP$ », autrement dit, qu'il existe des problèmes *NP* qu'il est impossible de résoudre (dans le cas général) au moyen d'algorithmes polynomiaux. Ce sujet très difficile est l'un des 7 problèmes retenus par la fondation CLAY, il est doté d'un prix d'un million de dollars...

Pour en savoir plus, vous pouvez consulter le site des prix CLAY :

http://www.claymath.org/Popular_Lectures/Minesweeper/

(ce site est en anglais).

Question 4 : la panne.

Énoncé.

Le voyageur tombe en panne à un endroit au hasard sur l'autoroute (supposée toute droite et infiniment longue). Il y a un poste de téléphone de secours tous les deux kilomètres exactement.

Le voyageur a une chance sur combien d'être à 100 mètres ou moins d'un téléphone ?

10.

La solution est : 10.

Quelques explications.

Puisqu'il y a un poste de téléphone tous les deux kilomètres, le voyageur tombe en panne dans une portion d'autoroute longue de deux kilomètres et délimitée de chaque côté par un poste de téléphone. L'énoncé précise que le voyageur tombe en panne à un endroit « au hasard » : derrière ce mot du langage quotidien se cache l'hypothèse qu'aucun endroit situé entre les deux postes n'est privilégié pour la panne, autrement dit, que le voyageur a la même probabilité de tomber en panne en chaque endroit entre ces deux postes.

Entre deux postes de secours, seuls les 100 premiers mètres et les 100 derniers conviennent (étant situés à 100 mètres ou moins d'un poste de téléphone), ce qui fait 200 mètres favorables pour 2 kilomètres, soit 2000 mètres, possibles. La probabilité cherchée est donc de 200/2000, soit 1/10.

Pour aller plus loin.

La modélisation de cette situation due au hasard consiste à munir le trajet entre les deux postes de la loi « uniforme » sur un segment de longueur 2000 mètres. Par définition, la loi de probabilité uniforme sur cet intervalle est celle pour laquelle le voyageur a une probabilité $l/2000$ de tomber en panne sur n'importe quel intervalle de longueur l mètres (si $l \leq 2000$). Cette formule est la généralisation de la formule :

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

utilisée pour calculer les probabilités d'événements associés à des expériences finies comme les lancers de dés ou les tirages de cartes, voir par exemple la question 6 de QUIZZ MATH 2002 :

<http://enigmath.org/quiz2002/quizz.pdf>

Lorsque les événements aléatoires considérés dépendent du temps, on les représente par des processus dits « stochastiques » c'est-à-dire dont le comportement ne peut pas être prévu à chaque instant de manière sûre. La théorie des processus stochastiques s'est montrée très utile depuis les années 80 pour modéliser les fluctuations des marchés financiers, et calculer au mieux les prix des nouveaux instruments financiers mis sur les marchés, comme les options. La première modélisation et les premiers calculs de prix d'options ont été menés par Black et Scholes en 1973 en s'appuyant sur des objets mathématiques issus du calcul des probabilités : le mouvement brownien (1900-1930) et le calcul d'Ito (autour des années 50). Ceux qui désirent en savoir plus sur le mouvement brownien peuvent jeter un coup d'œil au site :

<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/divers/brown.html>

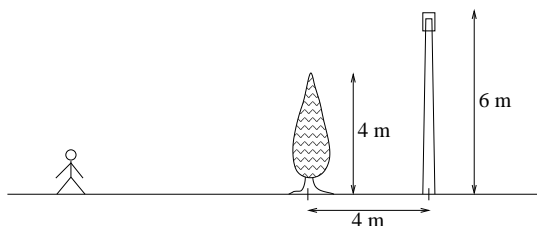
ainsi qu'au livre de C. Bouzitat et G. Pagès, *en passant par hasard*, éditions Vuibert, 2000.

Question 5 : la sieste.

Énoncé.

Olivier veut s'allonger pour lire, sans voir le poteau électrique de 6 mètres qui enlaidit son jardin. Celui-ci peut être masqué par un cyprès de 4 mètres de haut qui est à 4 mètres du poteau.

À quelle distance maximale du cyprès Olivier peut-il reposer sa tête (que l'on supposera au ras du sol) pour ne pas voir le poteau ?

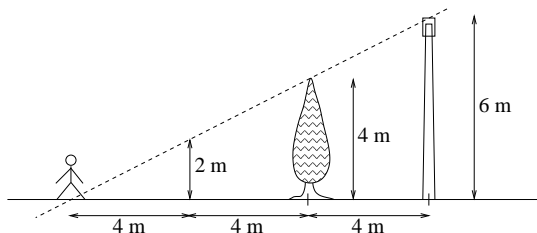


8 m.

La solution est : 8 m.

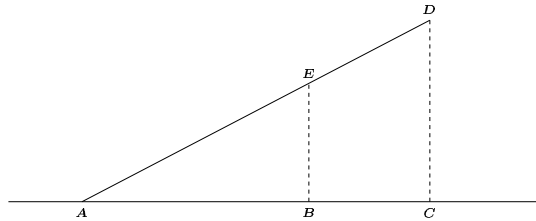
Quelques explications.

On peut résoudre ce problème en faisant un dessin comme la figure ci-dessous et en tenant le raisonnement suivant. La différence de hauteur entre le poteau et le cyprès est de 2 m, et ils sont distants de 4 m. Promenons-nous par la pensée sur la droite qui joint les sommets du poteau et du cyprès : droite représentée en pointillé sur la figure. Partons du sommet du poteau et laissons-nous descendre le long de cette droite. Lorsque nous aurons parcouru 4 m horizontalement vers la gauche, nous serons au sommet du cyprès, c'est-à-dire à 4 m de haut, 2 m en dessous de notre point de départ. Continuons notre descente : lorsque nous aurons parcouru 4 m de plus horizontalement, la pente de la droite étant constante, nous serons à nouveau descendu de 2 m et serons à 2 m de haut ; en avançant encore de 4 m horizontalement, nous descendons une fois de plus de 2 m, pour être enfin au ras du sol, exactement au point de la surface du sol qui est le plus éloigné du cyprès parmi ceux situés sous la droite en question : c'est donc précisément ce point, parmi ceux d'où Olivier ne verra pas le sommet du poteau, qui est le plus éloigné du cyprès. Or, souvenons-nous, nous avons, lors de notre balade sur la droite, parcouru 8 m horizontalement depuis le sommet du cyprès (4 m puis 4 m) : la distance maximale du cyprès à laquelle Olivier peut se placer est donc 8 m.



Pour aller plus loin.

Ce problème peut être résolu directement en appliquant le *théorème de Thalès* : on appelle E le sommet du cyprès B sa base (au niveau du sol, situé à la verticale de E), D le sommet du poteau et C sa base. La droite (DE) coupe la droite (BC) en un point que nous appelons A . Ce point est le lieu le plus éloigné du cyprès d'où l'on ne voit pas le sommet du poteau.



La distance à calculer est donc la longueur du segment $[A, B]$, longueur notée AB . Les droites (BE) et (CD) sont parallèles car toutes les deux verticales. Le théorème de Thalès nous indique alors que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \left(= \frac{AE}{AD} \right).$$

Or, l'unité étant le mètre, nous savons que $BC = 4$, $BE = 4$, $CD = 6$. Donc $AC = AB + BC = AB + 4$ et l'identité donnée par le théorème de Thalès devient

$$\frac{AB}{AB + 4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Donc la longueur AB vérifie $3 \times AB = 2 \times (AB + 4)$, soit $AB = 8$. La distance maximale du cyprès à laquelle Olivier peut se coucher est 8 m.

Question 6 : croissance de la puissance des ordinateurs.

Énoncé.

Marion adore les jeux vidéo et regrette les limites de son ordinateur récent. Heureusement, la puissance des ordinateurs croît très rapidement : elle est multipliée par 4 tous les 3 ans.

Quel nombre entier d'années (au minimum) Marion devra-t-elle patienter pour avoir un ordinateur au moins 1000 fois plus puissant que celui qu'elle a aujourd'hui ?

15.

La solution est : 15.

Quelques explications.

Dans 3 ans, selon la règle donnée dans la question, la puissance des ordinateurs aura été multipliée par 4. Dans 6 ans, elle aura été multipliée par 4×4 , soit 16. Ainsi, dans $3 \times n$ années (où n est un entier positif quelconque), la puissance des ordinateurs aura été multipliée par $4 \times 4 \times \dots \times 4$, produit dans lequel le chiffre 4 est présent n fois. Ce nombre, « 4 à la puissance n », est noté 4^n . Un rapide calcul montre que

$$4^1 = 4, \quad 4^2 = 16, \quad 4^3 = 64, \quad 4^4 = 256, \quad 4^5 = 1024.$$

Donc, dans $3 \times 5 = 15$ ans, la puissance des ordinateurs aura été multipliée par 1024 qui est supérieur à 1000. Marion devra donc attendre au plus 15 ans. On sait aussi qu'elle devra attendre strictement plus de 12 ans, car dans 12 ans la puissance aura été multipliée par $4^4 = 256$, ce qui est insuffisant. On sait donc déjà que Marion devra attendre 13, 14 ou 15 ans. Déterminer lequel de ces nombres constitue la réponse est un peu plus délicat car cela fait appel à des puissances non entières. Il est implicite dans la question posée que la puissance des ordinateurs évolue de manière régulière dans le temps. Il est alors légitime de chercher à savoir par quel nombre elle est multipliée chaque année. Notons r ce nombre. Il est tel que $r \times r \times r = 4$ puisqu'en 3 ans la puissance est multipliée par 4. Le nombre r est donc celui qui, une fois élevé à la puissance 3, vaut 4 ($r \times r \times r = r^3 = 4$). Ce nombre est noté $\sqrt[3]{4}$, ou encore $4^{1/3}$ (et vaut approximativement 1,587, comme peut vous l'apprendre votre calculatrice). On sait d'ores et déjà que $(\sqrt[3]{4})^{12} = 256$ et que $(\sqrt[3]{4})^{15} = 1024$. Calculons (à l'aide d'une calculatrice...) $(\sqrt[3]{4})^{14}$: on trouve environ 645, ce qui signifie que dans 14 ans, la puissance

des ordinateurs sera 645 fois plus grande qu'aujourd'hui. Marion devra donc attendre 15 ans pour avoir un ordinateur 1000 fois plus puissant (la question demandait explicitement un nombre entier d'années).

Pour aller plus loin.

La méthode utilisée ci-dessus permet en fait de calculer le temps exact (un nombre d'années non entier) au bout duquel la puissance des ordinateurs est multipliée par 1000. On peut en effet donner une signification au nombre r^t même lorsque le temps t n'est pas un entier. Il s'agit donc ici de calculer le nombre réel t tel que $\sqrt[3]{4^t} = 1000$. Le nombre $\sqrt[3]{4^t}$ pouvant aussi être écrit $4^{t/3}$, l'équation à résoudre est $4^{t/3} = 1000$. Les règles du calcul mathématiques donnent alors

$$\frac{t}{3} \ln 4 = \ln 1000$$

où la fonction \ln désigne le logarithme népérien. En définitive on obtient $t = 3 \times \ln 1000 / \ln 4$ qui vaut approximativement 14,949. C'est donc en approximativement 14,949 années que la puissance des ordinateurs est multipliée par 1000, ce qui représente à peu près 14 ans, 11 mois, 11 jours, 12 heures et un peu plus de 30 minutes... Le plus petit nombre entier d'années nécessaires est donc le plus petit entier supérieur à 14,949 : on retrouve bien de cette manière le nombre 15 trouvé précédemment.

L'hypothèse faite dans la question 6 (une multiplication par 4 tous les 3 ans) est tout à fait réaliste. Le scientifique Moore avait remarqué en 1965 que la puissance des ordinateurs doublait tous les 2 ans, et il en avait déduit une loi, connue depuis sous le nom de *Loi de Moore* : la puissance des ordinateurs croît de façon exponentielle (très rapide). Depuis, la loi de Moore est toujours vérifiée ! Vous pouvez trouver plus d'explications sur le site :

<http://www.volle.com/opinion/loidemoore.htm>

En espérant qu'Enigmath vous aura intéressé et en vous donnant rendez-vous l'an prochain, bien cordialement,

l'équipe d'Enigmath 2003.

mèl : enigmath@enigmath.org

url : <http://www.enigmath.org/equipe.php>