Enigmath 2006

http://www.enigmath.org

Vous trouverez ci-dessous les réponses aux 6 questions d'Enigmath 2006. Vous pouvez aussi consulter la page web

http://www.enigmath.org

Pour chaque question, nous vous rappelons l'énoncé et votre réponse, puis nous donnons la solution en l'expliquant. Les démonstrations proposées ne se veulent pas optimales mais utilisent des techniques élémentaires : il existe souvent des méthodes plus rapides utilisant des outils mathématiques sophistiqués.

Pour utiliser ce document de manière optimale, sachez que les adresses internet sont « cliquables » dans le fichier PDF que vous êtes en train de lire. Ces adresses ont été vérifiées au moment de la clôture du jeu, mais il est possible que certains sites aient été déplacés. Nous tâcherons d'en indiquer les nouvelles adresses sur

http://www.enigmath.org

Question 1 : Jdivrets et Jdifos.

Énoncé.
Sur l'île de Lalo Gik vivent deux types d'hommes, les Jdivrets et les Jdifos. Les Jdivrets disent toujours la vérité alors que les Jdifos mentent systématiquement. Vous partez en exploration sur cette île et vous vous retrouvez près d'une table ronde autour de laquelle sont assis 30 individus. Chacun dit à son voisin de droite : « Tu es un Jdifo ».
Combien y a-t-il de Jdivret(s) autour de cette table ?

Quelques explications.
Pour répondre à cette question, nous allons envisager deux cas possibles. Soit toutes les personnes autour de la table sont des Jdifos, soit il y a au moins 1 Jdivret à la table.

Première hypothèse : supposons que toutes les personnes autour de la table sont des Jdifos. Cependant si un Jdifo dit que son voisin de droite est un Jdifo (ce que prétend chaque personne à la table), comme il ment, cela veut dire que c'est un Jdivret. Ceci vient contredire l'hypothèse que toutes les personnes sont des Jdifos. Ce cas est donc exclu.

Deuxième hypothèse : supposons qu'il y a au moins un Jdivret autour de la table. Comme il dit que son voisin de droite est un Jdifo, c'est effectivement le cas. Ce Jdifo dit que son voisin de droite est un Jdifo, ce qui est faux, il a donc un Jdivret à sa droite. En raisonnant ainsi de proche en proche, on déduit que les Jdivrets ont toujours un Jdifo à leur droite, et que les Jdifos ont toujours un Jdivret à leur droite. On en conclut qu'autour de la table on trouve alternativement un Jdivret et un Jdifo. **Cela signifie donc qu'il y a autant de Jdivrets que de Jdifos autour de la table, c'est-à-dire 15 de chaque.**

Il faut noter que le fait qu'il y ait un nombre pair de personnes autour de la table est primordial. En effet, comme on trouve qu'il y a autant de Jdivrets que de Jdifos, si le nombre de personnes autour de la table était impair, ce problème n'aurait aucune solution.

Question 2 : Nombres pairs.

Énoncé.
Dans une lettre à Leonhard Euler, en 1742, Christian Goldbach a affirmé que tout nombre pair plus grand que 2 est la somme de deux nombres premiers. Personne n'a encore su démontrer cette affirmation. Cette décomposition n'est pas toujours unique.
Combien existe-t-il de nombres pairs inférieurs ou égaux à 20 pouvant s'écrire de plusieurs façons, sans tenir compte de l'ordre des termes dans l'addition, comme somme de 2 nombres premiers ?
Les nombres premiers inférieurs à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Quelques explications.
Le nombre 4 se décompose d'une seule manière comme somme de deux nombres premiers : $4 = 2 + 2$. Notons que 2 est le seul nombre premier pair. Comme la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair, le nombre 2 ne peut pas figurer dans la décomposition d'un nombre strictement plus grand que 4.

Dressons un tableau des sommes, inférieures ou égales à 20, de deux nombres premiers strictement supérieurs à 2 (en ligne le plus petit, et en colonne le plus grand) :

	3	5	7	11	13	17
3	6	8	10	14	16	20
5		10	12	16	18	
7			14	18	20	

On constate que

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5,$$
$$14 = 3 + 11 = 7 + 7,$$
$$16 = 3 + 13 = 5 + 11,$$
$$18 = 5 + 13 = 7 + 11,$$
$$20 = 3 + 17 = 7 + 13.$$

Il y a donc 5 nombres pairs inférieurs ou égaux à 20 qui s'écrivent de plusieurs façons, sans tenir compte de l'ordre des termes, comme somme de 2 nombres premiers.

Pour aller plus loin.
Quel est le plus petit nombre pair acceptant 3 décompositions distinctes en somme de deux nombres premiers[1] ?

La conjecture de Goldbach [2] est toujours un thème de recherche pour les mathématiciens.
Depuis la fin de l'année 2005, on sait qu'elle est vérifiée pour tout nombre pair inférieur à 3×10^{17}, c'est-à-dire 300 000 000 000 000 000, mais la conjecture « résiste » toujours.

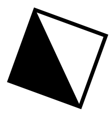
Il existe d'autres conjectures semblables à celle de Goldbach. Par exemple, la conjecture de Lévy selon laquelle tout nombre impair plus grand que 7 est somme d'un nombre premier et du double d'un nombre premier ; par exemple, $25 = 3 + 2 \times 11$. Personne n'a encore trouvé de démonstration de la conjecture de Lévy non plus.

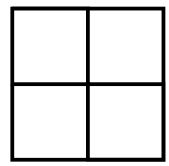
Vous trouverez de plus amples détails sur
http://mathworld.wolfram.com/GoldbachConjecture.html

[1] Réponse : 22, et nous avons $22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11$.
[2] Tout nombre entier pair supérieur à 2 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers.

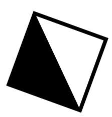
Question 3 : Pavage.

Énoncé.
On dispose de carreaux de faïence carrés, décorés du motif suivant : une diagonale du carré sépare deux moitiés, l'une est noire, l'autre blanche. Pour les assembler au mur, le carreleur a pour consigne de ne jamais mettre l'un contre l'autre un côté noir d'un carreau et un côté blanc d'un autre carreau.
De combien de manières différentes peut-il carreler la surface carrée composée de 4 carreaux dessinée ci-dessous ?

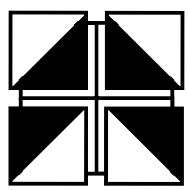




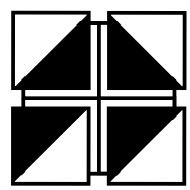
Quelques explications.
L'énoncé et la solution de cet exercice sont très fortement inspirés de l'article « Sébastien Truchet, le prêtre paveur » par Hervé Lehning (Tangente 99, juillet-août 2004, p. 18–20). Il s'agit ici de compter le nombre de façons de paver une surface carrée 2×2 avec des carreaux de faïence 1×1 comme celui dessiné ci-dessous à gauche, en respectant la contrainte suivante : un bord noir ne doit jamais se trouver à côté d'un bord blanc.



carreau élémentaire

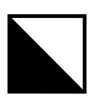


pavage correct

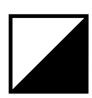


pavage incorrect

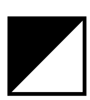
Si l'on considère un carreau seul, on peut le placer de 4 manières différentes :



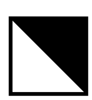
(a)



(b)

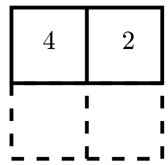


(c)



(d)

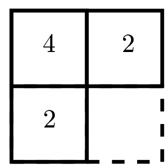
Observons que parmi ces 4 positions possibles, 2 ont le bord gauche noir : (a) et (c), les 2 autres, (b) et (d), ayant le bord gauche blanc. Considérons maintenant un bloc horizontal de deux carreaux contigus (c'est la première ligne de la surface carrée que l'on demande de paver). Si l'on a déjà posé le carreau de gauche (pour lequel on a 4 choix possibles), il ne reste donc plus que 2 positions compatibles pour le carreau de droite. Cette situation est représentée ci-dessous.



$$4 \times 2 = 8$$

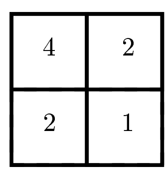
La première ligne peut donc être pavée de $4 \times 2 = 8$ façons différentes.

Cette première ligne étant pavée, de combien de choix dispose-t-on pour le deuxième carreau de la première colonne ? De la même manière que ci-dessus, parmi les 4 positions possibles du carreau seul, on remarque que 2 ont le bord supérieur noir ((c) et (d)) et 2 ont le bord supérieur blanc ((a) et (b)). Quel que soit le choix de la première ligne, il reste donc 2 façons de placer le carreau suivant. Cela fait $4 \times 2 \times 2 = 16$ façons de paver le bloc de 3 carreaux :



$$4 \times 2 \times 2 = 16$$

Une fois ce bloc de 3 carreaux pavé, la couleur du bord supérieur du coin manquant est imposée, ainsi que celle de son bord gauche. Or, parmi les 4 positions possibles du carreau seul, il y en a toujours une et une seule qui réponde à une configuration donnée de couleurs sur les bords gauche et supérieur en même temps. Par exemple, seule la configuration (d) a le bord gauche blanc *et* le bord supérieur noir. Dans tous les cas, il n'y a donc qu'un seul choix possible pour placer le dernier coin. Le nombre de façons de paver la surface demandée vaut donc $4 \times 2 \times 2 \times 1 = 16$.



$$4 \times 2 \times 2 \times 1 = 16$$

Pour aller plus loin.

Remarquons que cette méthode de comptage se généralise au cas d'une surface rectangulaire de taille quelconque : supposons que l'on veuille paver un rectangle formé de m colonnes et n lignes. Commençons par placer le coin supérieur gauche (on a 4 façons de le faire), puis pavons successivement les $(m-1)$ autres carreaux de la première ligne : à chaque fois il y a 2 positions compatibles avec la couleur du bord gauche imposée par le carreau précédent. Il y a donc

$$4 \times \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{m-1} = 4 \times 2^{m-1}$$

façons de paver la première ligne. On continue ensuite avec la première colonne : on a deux façons de placer le second carreau de cette colonne de manière à ce que son bord supérieur soit compatible avec le coin déjà placé, puis deux façons pour le troisième, puis deux pour le quatrième, et ainsi de suite jusqu'au dernier. Après avoir pavé la première ligne, il y a donc 2^{n-1} façons de paver la première colonne. Ce qui fait

$$4 \times 2^{m-1} \times 2^{n-1} = 2^{m+n}$$

façons de paver la première ligne et la première colonne. Mais après, il n'y a plus qu'une seule manière de placer les carreaux restants : on le voit en remplissant successivement le reste de la seconde ligne de gauche à droite, puis la troisième ligne, *etc.* (La position de chaque carreau est à chaque fois imposée par la couleur de son bord gauche et de son bord supérieur).

m carreaux

n carreaux

4	2	2	2	2	2	2	2
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1

Finalement, il y a 2^{m+n} manières de paver le rectangle de taille $n \times m$.

Il est amusant de constater que dans ce problème, la contrainte locale imposée par la règle de pavage fait qu'il existe toujours une unique solution à partir du moment où l'on a fixé les carreaux sur la première ligne et la première colonne. Ainsi, compter le nombre total de pavages revient à compter le nombre de façons de paver seulement la première ligne et la première colonne, ce qui est assez facile.

On peut imaginer d'autres règles de pavages pour lesquelles le comptage des solutions est beaucoup moins simple. Supposons par exemple que nous voulions paver un rectangle $n \times m$ avec des carreaux unis (noirs ou blancs), avec la condition que deux carreaux noirs n'aient jamais un côté en commun. On ne connaît pour ce problème aucune formule générale pour le nombre de pavages possibles. On sait simplement que ce nombre est, quand m et n sont grands, « de l'ordre de[3] » $\lambda^{m \times n}$, où λ est une certaine constante dont on ne connaît pas la valeur exacte, et qui s'appelle l'*entropie*. (Pour plus de détails sur ce second problème, voir l'article « Mathématique et physique des transitions de phase », par Alex Scott et Alan Sokal, Quadrature 60, avril-juin 2006, p. 33–35.)

Question 4 : Suite d'entiers.

Énoncé.
On considère la suite de nombres entiers suivante. On choisit un premier nombre entier, puis :

- s'il est pair, on le divise par 2 ;
- s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1.

On recommence ensuite avec le nouveau nombre obtenu.
Si le premier nombre est 5, quel sera le 2006^{e} nombre ?

Quelques explications.
Il n'y a pas de réponse immédiate « à vue de nez ». Mais les mathématiques peuvent aussi être une science expérimentale. Alors on essaie, « pour voir ».

On part de 5. Il est impair, on le multiplie donc par 3 et on ajoute 1. On obtient 16. Il est pair, on le divise par 2. On obtient 8, toujours pair, on continue, on trouve 4, puis 2, puis 1 enfin impair ! Mais $3 \times 1 + 1 = 4$. On retombe donc sur 4, puis 2, puis 1, puis 4, 2, 1, 4, 2, 1... Plus moyen de sortir de cette « orbite ». Au 2006-ième coup, la bonne réponse est donc forcément l'un de ces trois nombres, 4, 2 ou 1.

Récapitulons : ces opérations successives donnent

Numéro du nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Valeur du nombre	5	16	8	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2

On observe que le quatrième nombre est 4, et ensuite, tous les trois coups on retombe sur 4. Le $4 + 3 = 7^{e}$ nombre, puis le $4 + 6 = 10^{e}$ nombre, puis le 13^{e}, le 16^{e}, etc. sont 4. Essayons d'arriver ainsi aussi près que possible de 2006. On observe que $4 + 3 \times k \simeq 2006$ si $3 \times k \simeq 2002$. Divisons 2002 par 3. En posant la division et en gardant le reste, on obtient $2002 = 3 \times 667 + 1$. En revenant à notre problème, en partant de 5, le 4^{e} nombre est 4, puis le $4 + 3 \times 667 = 4 + 2001 = 2005^{e}$ nombre est 4. Le 2006^{e} nombre est donc 2.

[3] C'est-à-dire « à peu près égal à ».

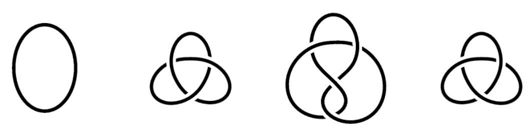
Pour aller plus loin.
Si vous avez déjà abordé la notion de *suite* dans vos études, vous avez peut-être essayé d'écrire tout cela de manière plus formelle. La suite d'opérations ci-dessus définit une *suite de nombres*, que l'on note $(u_n)_{n\geq 1}$. Le 1^{er} nombre est u_1 et vaut 5, le 2^e $u_2 = 16$,(...), le 2006^e nombre est u_{2006}. Les opérations effectuées peuvent se formaliser de la manière suivante ; $u_1 = 5$, et pour tout $n \geq 1$, si u_n est pair, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$, et si u_n est impair, $u_{n+1} = 3 \times u_n + 1$. Vous pouvez alors chercher dans vos souvenirs, dans vos cours... Cette suite ne fait malheureusement pas partie des suites classiques que l'on sait étudier. Autrement dit, nous ne sommes pas très avancés.

En fait, cette suite, connue sous le nom de *suite de Syracuse*, est très célèbre pour les problèmes qu'elle pose aux mathématiciens. En effet, on conjecture que quel que soit le nombre u_1 dont on part, on finit tôt ou tard par tomber sur le *cycle périodique* $4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4\ldots$ Cette question est apparue, semble-t-il, dans les années 1950-1960 dans la communauté mathématicienne. L'expérimentation numérique (sur ordinateur) laisse penser que le résultat est vrai. Cependant, personne n'a trouvé de démonstration !

Sur le site ci-dessous, vous trouverez de plus amples informations sur cette suite, ainsi que des liens vers des sites proposant des simulations numériques avec visualisation du comportement de la suite pour n'importe quelle valeur initiale.
http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Syracuse

Question 5 : Les nœuds.

Énoncé.
En partant du nœud représenté sur la figure de gauche et sans le découper, **en quel nœud de la liste suivante pouvez-vous le transformer ?**



1 2 3 4

Quelques explications.
On voit facilement que l'on peut transformer le nœud de gauche en le nœud numéro 4 : il suffit de faire passer la boucle du bas par dessus le nœud et on obtient le nœud numéro 4. On peut se représenter cette opération mentalement, ce qui exige une bonne vision spatiale, faire un dessin, ou prendre un bout de ficelle, réaliser le nœud de gauche, refermer la ficelle (avec un nœud ou un adhésif) et manipuler !

Pour aller plus loin.
Par contre, on ne peut pas transformer le nœud de gauche (ou, ce qui est équivalent, le nœud numéro 4) en l'un des nœuds 1, 2 ou 3. Pour s'en convaincre, on peut réaliser le nœud de gauche avec un bout de ficelle, et manipuler... mais est-on sûr d'avoir tout essayé ? Comment savoir ?

Il est possible de démontrer mathématiquement que l'on ne peut pas transformer le nœud numéro 4 en l'un des nœuds 1, 2 ou 3. La branche des mathématiques qui s'occupe des questions de ce genre est la Théorie des nœuds, qui fait partie d'un domaine plus vaste appelé Topologie.

Le principe, pour démontrer que l'on ne peut pas déformer un nœud en un autre, est d'associer à chaque nœud N un invariant I(N), c'est-à-dire une quantité qui est préservée quand on tranforme le nœud. Cet invariant I(N) peut être une propriété mathématique, un nombre, une formule... Si on a deux nœuds N et N' dont les invariants I(N) et I(N') sont différents, alors on ne peut pas transformer N en N', puisque sinon, comme l'invariant est préservé lors de la transformation, on aurait I(N)=I(N').

L'un des invariants les plus simples est la *coloration*. Il se trouve que cet invariant permet de différencier le nœud de gauche des nœuds 1 et 3, ce qui n'est déjà pas mal. Voici en quoi cela consiste.

Tout d'abord, quand on parle de nœuds, il s'agit de nœuds fermés (c'est-à-dire que l'on a refermé la ficelle : il n'y a pas d'extrémités libres). Ensuite, on représente un nœud par sa projection plane, comme sur les dessins de la question. Un tel dessin s'appelle le *diagramme* d'un nœud. Chaque diagramme est composé de plusieurs brins : un pour le diagramme 1, trois pour les diagrammes 2 et 4, et quatre pour le diagramme 3.

Ensuite on se munit de trois crayons de couleur, disons rouge, vert, bleu. On dit que le diagramme d'un nœud est *coloriable* si l'on peut colorier chaque brin d'une couleur, en respectant les deux règles suivantes :

1. au total on utilise au moins deux couleurs (tous les brins ne sont pas de la même couleur) ;
2. à chaque croisement, soit une couleur est présente, soit les trois le sont.

Il se trouve, et c'est un théorème dû à R. H. Fox, que le fait d'avoir un diagramme coloriable est un invariant : si on part d'un nœud dont le diagramme est coloriable, et que l'on transforme le nœud, alors le nouveau diagramme sera coloriable. Il s'agit d'un invariant qui n'a que deux valeurs possibles, vrai ou faux. On ne peut donc bien sûr pas espérer obtenir beaucoup d'informations d'un tel invariant !

Le nœud numéro 1 n'est pas coloriable (à cause de la règle numéro 1). Le nœud de gauche et les nœuds 2, 4 sont coloriables (un brin de chaque couleur). Enfin, le nœud numéro 3 n'est pas coloriable (vérifiez-le !). Conclusion : on ne peut pas transformer le nœud de gauche en le nœud numéro 1 ni en le numéro 3.

En revanche, cet invariant ne permet pas de différencier les nœuds 2 et 4 (noter que 2 est l'image miroir de 4). Pour différencier ces deux nœuds, il faut faire appel à des invariants plus puissants, le *polynôme de Jones* par exemple.

Pour en savoir plus sur le coloriage des nœuds :
http://www.mjc-andre.org/pages/amej/edition/0013noeu_bayer/0013noeu_bayer.html
Pour en savoir plus sur d'autres invariants :
http://www.ulb.ac.be/soco/matsch/recherche/11/noeuds/noeuds04.htm

Question 6 : Gardien de but.

Énoncé.
Durant la coupe du monde de football, pour préparer un match contre l'équipe du Brésil, Bouffon a regardé les 15 derniers tirs au but de Donaldinho. Il a remarqué que celui-ci avait tiré 8 fois dans la moitié gauche du but et 9 fois dans la moitié basse. Juste avant le match, son entraîneur, qui a visionné les mêmes cassettes, lui signale que Donaldinho a tiré seulement 3 fois en bas à gauche.
Dans quel quart du but Donaldinho tire-t-il le plus souvent ?

1) en haut à gauche 2) en haut à droite 3) en bas à gauche 4) en bas à droite.

Quelques explications.

Bien sûr, il se peut que Donaldinho tire toujours exactement au milieu. Cependant, lorsque les mathématiciens proposent un modèle pour décrire la réalité, ils s'autorisent quelques simplifications par rapport à celle-ci, en essayant de garder un modèle vraisemblable, crédible.

Dans cette question, on suppose donc que Donaldinho tire en haut à gauche, en haut à droite, en bas à gauche, ou en bas à droite. Et on résout l'exercice en partant du principe que la *probabilité* qu'il tire sur la ligne médiane horizontale ou la ligne médiane verticale est nulle.

On peut faire un petit tableau pour récapituler les données de cette question.

	Tirs à gauche	Tir à droite	Total
Tirs en haut			
Tirs en bas	3		9
Total	8		15

On le complète très facilement : on remarque qu'il y a

- 8 tirs sur 15 à gauche, il y a donc $15 - 8 = 7$ tirs sur 15 à droite ;
- 9 tirs sur 15 en bas, donc $15 - 9 = 6$ tirs sur 15 en haut ;
- 8 tirs à gauche, mais seulement 3 en bas à gauche, donc $8 - 3 = 5$ en haut à gauche ;
- 6 tirs en haut, dont 5 en haut à gauche, donc $6 - 5 = 1$ en haut à droite.

Reste à remarquer que sur les 9 tirs en bas, 3 sont en bas à gauche, donc les 6 restant sont en bas à droite. On obtient finalement le tableau complété suivant.

	Tirs à gauche	Tirs à droite	Total
Tirs en haut	**5** tirs en haut à gauche	**1** tir en haut à droite	**6** tirs en haut
Tirs en bas	3 tirs en bas à gauche	**6** tirs en bas à droite	9 tirs en bas
Total	8 tirs à gauche	**7** tirs à droite	15 tirs

Autrement dit, Donaldinho a tiré le plus souvent (6 fois sur 15) en bas à droite.

Pour aller plus loin.
On peut supposer que ces tirs reflètent ses préférences inconscientes : il a horreur de tirer en haut à droite, n'aime pas trop tirer en bas à gauche, et préfère légèrement tirer en bas à droite (6 fois sur 15) par rapport à en haut à gauche (5 fois sur 15). On peut alors conseiller à Bouffon de se tenir plutôt prêt à plonger en bas à droite (mais aussi, avec une probabilité légèrement plus faible, éventuellement à l'opposé, en haut à gauche !).

Avec le langage des probabilités, on peut dire que la probabilité que Donaldinho tire en bas à droite est de $\frac{6}{15} = 0,4$. Autrement dit, il y a 40% de chances qu'il tire en bas à droite, mais aussi 33,33% de chances qu'il tire en haut à gauche, 20% de chances en bas à gauche, et 6,67% en haut à droite. Si les 15 tirs étudiés reflètent bien son comportement, la probabilité qu'il tire en bas à droite est la plus forte. Par ailleurs, la théorie mathématique des probabilités nous dit que la probabilité qu'il tire exactement sur une ligne médiane est nulle (ce qui ne veut pas dire que cela ne peut pas arriver !).

En espérant qu'Enigmath vous aura intéressé,
bien cordialement,

l'équipe d'Enigmath 2006 (http://www.enigmath.org/equipe.php).
mèl : enigmath@enigmath.org