

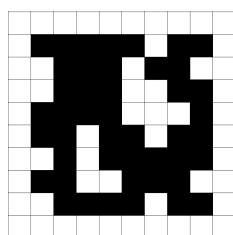


ENIGMATH 2008



Corrigé

Les questions posées avaient pour but d'appliquer deux techniques de traitement du signal, la dilatation et l'érosion, à l'image présentée ci-dessous.



Question 1 : Si on applique une seule fois la technique de dilatation à la figure ci-contre, combien de pixels noirs obtient-t-on au total ?

La technique de dilatation s'applique en observant les deux règles suivantes :

- tout pixel noir reste noir,
- un pixel blanc devient noir s'il a au moins un voisin noir.

Une première remarque consiste à observer que tous les pixels noirs de l'image initiale se trouvent à l'intérieur d'un grand carré de taille 8×8 pixels. Les pixels blancs qui se trouvent dans ce carré ont tous au moins un voisin noir, sauf un. Cela signifie que dans ce grand carré, après avoir effectué l'opération de dilatation, il y aura $64 - 1$, soit 63 pixels noirs. Il reste ensuite à étudier le cas des pixels blancs qui se trouvent en dehors de ce grand carré, c'est-à-dire sur la bordure de l'image. Ceux qui ont un voisin noir deviennent noirs. Il y a donc le long de cette bordure exactement 23 pixels blancs qui deviennent noirs : 7 en haut, 6 en bas, 4 à gauche et 6 à droite. On obtient finalement un total de $63 + 23 = 86$ pixels noirs après dilatation.

Question 2 : Combien de fois faut-il appliquer la technique d'érosion pour faire disparaître tous les pixels noirs ?

On applique la technique d'érosion, en observant les deux règles suivantes :

- tous les pixels blancs restent blancs,
- un pixel noir devient blanc s'il a au moins un voisin blanc.

Pour faciliter le raisonnement, on découpe l'image en quatre carrés de taille 5×5 pixels. Dans les carrés situés en haut à droite et en bas à gauche, tous les pixels noirs ont au moins un voisin blanc. Ils deviennent donc tous blancs après la première érosion. Dans le carré situé en bas à droite, seuls deux pixels noirs n'ont aucun voisin blanc. Ce sont les seuls à rester noirs. Cependant, lors de la seconde érosion, ils auront chacun au moins un voisin blanc, et deviendront donc blancs à leur tour. Enfin, dans le carré situé en haut à gauche, il y a également seulement deux pixels noirs sans aucun voisin blanc, et il restera donc seulement deux pixels noirs après la première opération d'érosion. Ces derniers deviendront par ailleurs blancs lors de la seconde érosion. En récapitulant, on peut donc conclure qu'il suffit de deux érosions pour faire disparaître tous les pixels noirs.

Liens avec la recherche en mathématiques

Le problème qui vous a été proposé vous permettait de découvrir les opérations de dilatation et d'érosion, deux techniques caractéristiques du traitement de l'image. Le traitement de l'image est une discipline à mi-chemin entre mathématiques appliquées et informatique, qui étudie les images numériques et les différents traitements, analyses ou modifications dont elles peuvent être l'objet. Ces traitements ou modifications ont par exemple pour but de restaurer une image dégradée, d'en extraire des informations, au besoin en améliorant sa lisibilité, ou encore de la compresser, c'est-à-dire de réduire la quantité de données contenues dans l'image sans en altérer la qualité visuelle. Les techniques utilisées font appel à des notions très diverses des mathématiques ou de l'informatique. Dans la suite de ce document, nous en présentons brièvement quelques-unes, et proposons des liens qui permettront aux lecteurs intéressés d'en savoir davantage. Le contenu de ces liens peut sembler ardu car il s'agit pour la plupart d'articles de recherche, cependant, nous les avons choisis pour les illustrations et pour permettre à chacun de se faire une idée des résultats des techniques proposées.

1 Restauration d'images dégradées

Dans cette partie, il s'agit d'appliquer un traitement à des images dont le contenu est dégradé, afin de les restaurer, c'est-à-dire de les réparer. On peut évidemment penser à de vieilles photographies altérées par le passage du temps, ou suite à des manipulations, et que l'on aimerait traiter afin de reconstituer le plus fidèlement possible les images d'origine. Mais il peut également s'agir par exemple d'images d'échantillons biologiques, obtenues par microscopie à rayons X, dont on veut éliminer le bruit issu des conditions expérimentales, ou encore d'images obtenues par des observations satellites. Une image peut être dégradée de plusieurs manières différentes. Ici nous en distinguons deux en particulier :

- une dégradation globale : un *bruit* (équivalent visuel de grésillements qui viennent perturber l'écoute d'un morceau de musique ou de la radio) qui affecte a priori toute l'image et en diminue la lisibilité,
- une dégradation locale : un "trou", c'est-à-dire une surface de l'image sur laquelle aucune information n'est disponible.

Dans le cas d'un bruit, l'idée est d'arriver à supprimer ce bruit tout en préservant les structures significatives de l'image, notamment les discontinuités et les contours des objets. Pour ce faire, plusieurs techniques ont été développées. Certaines d'entre elles se basent sur l'idée qu'éliminer le bruit présent revient à modifier l'image de manière à minimiser une sorte d'*énergie* calculée à partir des informations présentes sur l'image. D'autres éliminent le bruit de l'image, pixel par pixel, en utilisant des méthodes statistiques pour choisir quelle zone autour d'un pixel est la plus pertinente à utiliser pour éliminer le bruit de ce pixel. D'autres encore résolvent en ce but des équations aux dérivées partielles, c'est à dire des équations qui prédisent la variation temporelle d'une variable en fonction de ses variations locales....

Dans le cas d'un trou, il ne s'agit plus de modifier des pixels déjà existants, mais de les créer là où manque l'information. Une technique employée dans ce cas consiste à *transporter* l'information qui se trouve sur les bords du trou à l'intérieur de celui-ci, également à l'aide d'équations aux dérivées partielles. Cette technique est inspirée d'une méthode de restauration

de peintures d'art, où l'on retouche la zone endommagée en peignant de l'extérieur de celle-ci vers l'intérieur .

Pour davantage d'informations sur ce sujet, nous vous invitons à consulter les liens suivants :

http://www.irisa.fr/vista/Papers/2004_rfia_kervrann.pdf

http://www.tsi.enst.fr/tsi/enseignement/ressources/mti/restaur_tv/index.html

http://www.greyc.ensicaen.fr/~dtschump/publications/tschumperle_rfia00.pdf

http://www-c.inria.fr/MACS/IMG/pdf/Report_Mumford.pdf

Les pages 29 et 30 de l'habilitation à diriger des recherches de Simon Masnou fournissent également des exemples d'images restaurées :

<http://www.ann.jussieu.fr/~masnou/>

2 Extraction de contours et calcul de distances par dilatation et érosion

Dans la pratique, il est souvent utile (voire nécessaire) d'extraire les contours délimitant les interfaces entre différentes formes présentes dans une image. En médecine, on peut naturellement penser à l'identification d'une tumeur. Celle-ci peut être obtenue par différentes techniques plus ou moins fines. À partir d'une forme approximative, l'interface (contour) peut être obtenue à l'aide de différentes techniques mathématiques appelées *vectorisation aux contours actifs*, *lissage par convolution*, *filtres*,... Deux types de cas peuvent se présenter :

- la courbe de contour est fermée, mais il reste des points isolés *parasites* . L'application d'une étape d'érosion puis une étape de dilatation permet d'améliorer la précision du contour.
- La courbe de contour n'est pas fermée. Pour la fermer, on peut appliquer successivement une étape de dilatation suivie d'une étape d'érosion.

Plus d'informations peuvent être trouvées dans le cours suivant :

<http://www.cnam.fr/math/IMG/pdf/CSC110-Cnam-Intro.pdf>

Un autre point intéressant peut être, à partir d'une courbe fermée définissant le contour d'un obstacle, de définir la distance à cette courbe (distance minimale à la courbe). Ceci est très utilisé dans la modélisation mathématique et la simulation numérique via des fonctions représentant les distances aussi appelées fonctions « level set ». Par exemple, intéressons-nous au cas d'un obstacle (formé de plusieurs carrés noirs) placé au milieu de carrés blancs. La distance entre les points du domaine et l'interface peut être calculée de la manière suivante. Pour les points à l'extérieur de l'obstacle, des étapes successives d'érosion peuvent fournir une approximation de la distance entre un point et l'interface, c'est-à-dire la frontière entre carrés noirs et carrés blancs. Par exemple, soit L la taille caractéristique d'un carré (blanc ou noir) : si un carré change de couleur à la n -ième application d'érosion (dilatation), la distance peut être approchée par $n \times L$.

3 Squelettisation

Les techniques d'érosion permettent d'obtenir le *squelette* des images numériques. Il s'agit d'une image réduite qui conserve les caractéristique principales de l'image de départ : forme, trous, parties jointes ou disjointes. . . Harry Blum a donné une définition du squelette par analogie aux feux de forêt : imaginez que l'image dont vous voulez obtenir le squelette est recouverte d'une prairie d'herbe sèche. Tous les points du contour de la prairie sont enflammés en même

temps. Le feu se propage à la même vitesse dans toutes les directions. Le squelette de l'image de départ est alors l'ensemble des points où plusieurs fronts enflammés se sont rencontrés. Il s'agit donc d'*amincir* l'image en enlevant successivement des couches de pixels autour de l'image, mais en gardant les points caractéristiques. Pour cela on utilise une technique d'érosion particulière décrite et illustrée sur la page suivante :

<http://raphaello.univ-fcomte.fr/ig/TraitementImages/TraitementImages.htm#Squelettisation>

Cette technique de squelettisation est appliquée par exemple dans le domaine médical sur les images d'IRM, pour reconstituer les réseaux de vaisseaux sanguins, ou pour détecter des anévrismes qui sont des dilatations localisées des vaisseaux sanguins qui n'apparaissent plus sur le squelette. Pour des illustrations et plus d'explications, vous pouvez consulter les deux sites suivants :

http://www-sop.inria.fr/asclepios/Publications/Fouard/Fouard_et_al_RFIA_2004.pdf

<http://www-sop.inria.fr/epidaure/personnel/malandain/cours/Topology/sld121.htm>

Une autre application est la création de modèles numériques de terrain pour les GPS à partir de cartes papier. La technique de squelettisation permet en particulier d'*extraire* les courbes de niveaux de ces cartes. Pour plus de détails, voir :

<http://iparla.labri.fr/publications/2003/PGG03/afig2003-pouderoux.pdf>