ENIGMATH 2009

Corrigé

Vous trouverez ci-dessous les réponses aux 4 questions d'Enigmath 2009. Pour chaque question, nous rappelons l'énoncé puis nous donnons la solution en l'expliquant et tentons en quelques phrases de mettre en évidence un lien avec des théories mathématiques plus élaborées faisant l'objet de recherches actuelles.

Question 1

Enoncé : Une princesse doit choisir son futur bien aimé parmi trois jeunes soupirants dont les qualités se valent. Elle décide de choisir le plus grand. Les trois se présentent à tour de rôle devant la princesse pour qu'elle les découvre. Si elle ne choisit pas le premier qui se présente, elle ne pourra plus le choisir. De même pour les suivants. Elle hésite entre les trois stratégies suivantes.

A Choisir le premier prétendant.

B Refuser le premier prétendant. Puis, si le deuxième est plus grand que le premier, alors choisir le deuxième, sinon choisir le troisième prétendant.

C Choisir le troisième prétendant.

Pour avoir le plus de chance de se marier avec le plus grand, quelle stratégie la princesse doit-elle adopter ?

Solution : Elle doit choisir la stratégie B.

Explication : Appelons G le prince le plus grand, P le plus petit, et M celui qui se trouve entre les deux. Ces trois princes se présentent dans un ordre inconnu de la princesse. Il y a 6 ordres possibles. Examinons les trois stratégies pour chacun de ces ordres.

Si les princes se présentent dans l'ordre GMP ; avec la stratégie A, la princesse choisit le premier, donc le plus grand (G) ; avec la stratégie C, elle choisit le dernier, donc le plus petit (P) ; et avec la stratégie B, elle laisse passer le premier, donc le plus grand, le second n'est pas plus grand que le premier, donc elle le laisse passer et elle choisit le troisième, le plus petit (P).

On analyse de la même façon les autres ordres possibles GPM, MGP, MPG, PGM et PMG. Ces choix sont récapitulés dans le tableau suivant.

Ordre des princes	Stratégie A	Stratégie B	Stratégie C
GMP	G	P	P
GPM	G	M	M
MGP	M	G	P
MPG	M	G	G
PGM	P	G	M
PMG	P	M	G
Nombre de bons choix	2/6	3/6	2/6

Comptons le nombre de bons choix (choix du plus grand) pour chaque stratégie. Avec les stratégies A et C, la princesse a 2 chances sur 6 de choisir le plus grand. Avec la stratégie B elle a 3 chances sur 6 de choisir le plus grand. La stratégie B est donc la meilleure.

Pour aller plus loin : Ce problème est connu par les mathématiciens sous le nom de *problème du mariage* ou *problème de la secrétaire*, où il s'agit alors d'embaucher la meilleure secrétaire, plutôt que de choisir le plus grand prince. On peut montrer que la stratégie B est non seulement la meilleure parmi les trois proposées, mais aussi la meilleure parmi toutes les stratégies possibles. Plus généralement, s'il y a n princes ou secrétaires candidats, la meilleure stratégie consiste à rejeter systématiquement les r premiers candidats, puis pour les suivants, accepter le premier qui est meilleur que les r rejetés au début. La valeur de r se calcule par l'algorithme des T. Bruss, voir (en anglais)

`http://en.wikipedia.org/wiki/Odds_algorithm`

Pour des nombres de candidats n petits, les valeurs de r sont données dans le tableau suivant.

nombre de candidats	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	1	1	1	2	3	3	3	4	4
Proba. de choisir le meilleur	1	0.5	0.5	0.458	0.433	0.428	0.414	0.410	0.406

Lorsque le nombre de candidats n est très grand, la valeur de r s'approche de n/e, où $\mathrm{e} \simeq 2.718$ est le nombre de base du logarithme népérien, c'est-à-dire qu'il faut commencer par rejeter environ les premiers 37% des candidats. La probabilité de choisir le meilleur est alors de $1/\mathrm{e}$, soit environ 37%.

Il existe de nombreuses variantes de ce problème, dont certaines sont l'objet de recherche à l'heure actuelle. On peut citer par exemple, le problème du mariage lorsque le nombre n de candidats est inconnu. La probabilité optimale de choisir le meilleur candidat est alors plus faible. On peut aussi réitérer cette procédure et considérer les problèmes d'embauches et licenciements successifs de secrétaire (ou de mariage et divorce).

Ce problème se classe dans la catégorie plus vaste des problèmes d'*arrêt optimal* stochastique, où il s'agit de d'*arrêter* un processus aléatoire (c'est-à-dire faire son choix de prince ici) au *meilleur* moment. Pour plus de renseignements, voir l'article *Savoir quand s'arrêter* de *Pour la science*.

`http://www.pourlascience.fr/ewb_pages/f/fiche-article-savoir-quand-s-arreter-22670.php?chap=1`

Question 2

Enoncé : Un prix augmente de 10% par an. L'augmentation sur une période de trois ans est d'environ :

A 30% **B** 31% **C** 32% **D** 33%

Solution : D

Explication :
Pour fixer les idées, considérons un prix initial de 100 (euros). Après la première année, le prix sera de 100+10=110. Après la deuxième année, il sera de 110+11=121. Enfin, après 3 ans, il sera de 121+12,1=133,1. L'augmentation globale est donc d'environ 33% .

Pour aller plus loin :
Il s'agit d'un processus non linéaire en ce sens que les pourcentages ne doivent pas être simplement additionné (on obtiendrait alors 3 fois 10% soit une augmentation de 30%). C'est une erreur que l'on constate pourtant assez souvent dans les médias. Une connaissance des mathématiques (et statistiques) élémentaires est néanmoins indispensable pour analyser les observations économiques ou sociologiques

(sondages...).

L'opération à effectuer à chaque période est une multiplication et les suites ainsi construites s'appellent suites géométriques. A la n^{ieme} itérations, on doit multiplier le prix initial par $1,1^n$. Il s'agit donc d'une croissance exponentielle puisque $1,1^n = \exp(n \ln(1,1))$.

Notons pour conclure que l'utilisation des mathématiques dans le milieu financier a fait l'objet de nombreux débats y compris au sein de la communautée mathématique. Citons par exemple le dossier Faut-il avoir peur des mathématiques financières sur le site images des maths.

`http://images.math.cnrs.fr/+-Faut-il-avoir-peur-des-maths-+.html`

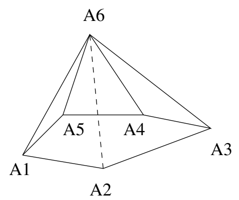
Question 3

Enoncé : Un polyèdre a 10 arêtes et 6 faces, combien a-t-il de sommets ? Indication : une des faces est un pentagone.

A 4 **B** 6 **C** 7 **D** 8

Solution : B

Explication : Puisque le polyèdre possède parmi ses faces un pentagone alors il possède au minimum 5 arêtes que l'on notera A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 où A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 désignent les sommets du pentagone. Par hypothèse le nombre de sommets du polyèdre est exactement 6 ; notons A_6 le sixième sommet. On obtient la figure suivante.



Par conséquent le polyèdre en question possèdera 10 arêtes : A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_1A_6, A_2A_6, A_3A_6, A_4A_6, A_5A_6.

Pour aller plus loin : Tout d'abord vous pourrez vérifier la relation d'Euler. Pour tout polyèdre convexe on a :

$$S - C + F = 2$$

où S, C et F désignent respectivement les nombres de sommets, de côtés et de faces. Nous obtenons : $F = 2 + A - S = 2 + 10 - 6 = 6$. Le nombre de face est donc 6.

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Descartes-Euler`

La caractéristique d'Euler nous donne un invariant topologique pour les polyèdres ; en particulier pour un polyèdre fini à deux dimensions la caractéristique d'Euler est définie comme la somme alternée suivante :

$$\chi = \sum (-1)^d k_d,$$

où k_d désigne le nombre de cellules de dimension d dans le polyèdre.

`http://www.dimensions-math.org/Dim-fr.htm`

Plus généralement la caractéristique d'Euler peut-être calculée pour des surfaces à l'aide d'un maillage sur ces surfaces.

`http://fr.wikipedia.org/wik/caracteristique-d'Euler`

Considérons maintenant un bol ouvert dont la forme hémisphérique est équivalente, du point de vue topologique, à la sphère à un trou et considérons les polyèdres inscrits dans le bol dont la face contenue dans le plan équatorial est ouverte. Par exemple une pyramide inversée dont le sommet coincide avec le pôle de l'hémisphère. Nous avons alors : $A = 6$, $S = 4$, $F = 3$, et donc : $S - A + F = 1$. Morse démontra l'égalité de base de ce qui est aujourd'hui appelé la théorie de Morse :

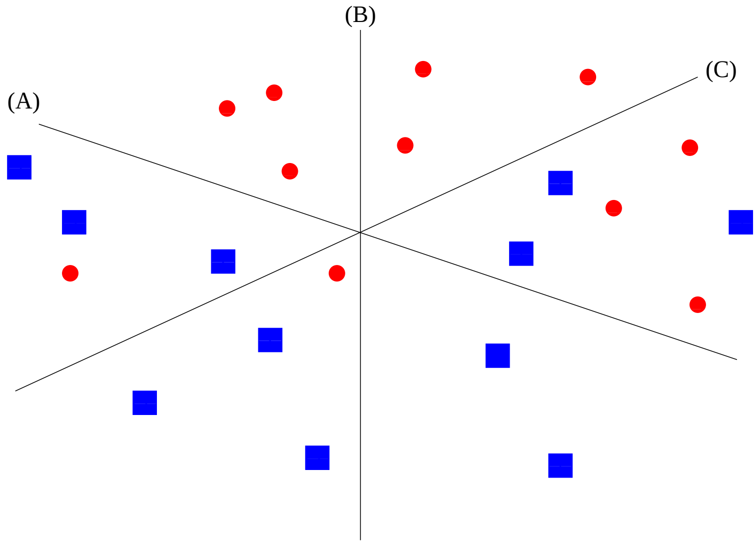
$$(-1)^{\lambda_1} + ... + (-1)^{\lambda_n} = S - A + F,$$

où les λ_i désignent des nombres entiers dits nombres caractéristiques. Cette égalité relie la notion de point critique, issue du calcul des variations, aux concepts de la topologie.

`http://fr.wikipedia.org/wik/surface-minimale`

Question 4

Enoncé : Dans la figure ci-dessous, il y a 11 points bleus et 11 points rouges. Laquelle de ces trois droites sépare les points en deux groupes les plus homogènes c'est-à-dire où la différence de nombre de points de chaque couleur est la plus grande possible ?



Solution : A

Explication : Comptons pour chacune des 3 droites le nombre de points rouges et bleus de part et d'autres de la droite.

	Droite A	Droite B	Droite C
Points rouges	2/9	5/6	7/4
Carrés bleus	8/3	6/5	3/8
Différence rouge/bleu	6	1	4

La droite qui sépare le mieux les rouges des bleus est donc la droite A.

Pour aller plus loin : Plusieurs critères autres que la simple différence ci-dessus permettent de choisir la meilleure partition. En voici deux très utilisés : le critère de Gini et le critère d'information (ou d'entropie). Soit $r = \frac{2}{10}$ (resp. $1 - r = \frac{8}{10}$) la proportion de rouges (resp. de bleus) dans la partie des 10 points situés en dessous de la droite A, alors le critère de Gini pour cette partie vaut par définition $2r(1-r)$ soit $\frac{32}{100}$. Ce critère vaut $\frac{54}{144}$ pour les 12 points situés au dessus de A et pour la partition déterminée par la droite A il vaut par définition la moyenne des deux critères, pondérée par la proprtion de points

de chaque partie soit $\frac{10}{22}\frac{32}{100}+\frac{12}{22}\frac{54}{144}=0.350$. On trouve 0.496 pour la droite B et 0.433 pour la droite C. La meilleure droite est celle qui donne le critère de Gini le plus faible, c'est encore la droite A. Le critère d'information se calcule de manière identique mais avec l'expression $-rln(r)-(1-r)ln(1-r)$ où ln désigne le logarithme népérien avec la convention $0ln(O)=0$. On trouve 0.534 pour A, 0.496 pour B et 0.625 pour C, la meilleure droite est cette fois-ci B.
Le problème se généralise : trouver, dans une famille de fonctions, une fonction qui *discrimine* au mieux, au sens d'un certain critère, deux ou plusieurs classes à partir de couples d'observations (variables expliquant la classe, classe). Dans la question on a trois fonctions affines, les variables sont abscisse et ordonnée, il y a deux classes les rouges et les bleus et on a observé 22 points. Les observations vont servir à 'apprendre' (à estimer) la fonction, on parle d'*apprentissage automatique*

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Apprentissage_automatique`

Les méthodes, qui allient mathématique et informatique, apportent une *aide à la décision* importante dans des domaines aussi divers que la biomédecine, la robotique ou l'économie. Les plus utilisées sont les arbres et forêts de décision, les SVM, la régression et les réseaux de Neurones

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Apprentissage_automatique#Les_algorithmes_utilis.C3.A9s`

Comme les classes et les classes des observations sont connues, on parle de *classification supervisée*.