QUIZZ MATH 2002

http://www.univ-orleans.fr/quizz/

Cher(e) Prenom Nom ,

Vous trouverez ci-dessous les réponses aux 6 questions du QUIZZ MATH 2002. Pour chaque question, nous rappelons l'énoncé, votre réponse, la solution en l'expliquant et tentons en quelques phrases de mettre en évidence le lien avec la recherche contemporaine. Les démonstrations proposées ne se veulent pas optimales mais utilisent des techniques élémentaires : il existe souvent des techniques plus rapides utilisant des outils mathématiques plus sophistiqués. Les noms des mathématiciens cités apparaissent en bleu et nous vous invitons à consulter le site

http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/

Si vous ne comprenez pas certains passages, n'hésitez pas à demander des explications à votre Professeur de Mathématiques!

1 Pythagore et Fermat

Énoncé :
Trouver deux nombres x et y entiers positifs non nuls tels que xy et

$$x^2 + y^2 = 15^2. \tag{1}$$

(*Le symbole* x^2 *se lit "*x *au carré" et vaut x multiplié par* x*. Ainsi,* 15^2 *vaut* $1515 = 225$.)

Votre réponse est : $x = Rep1x,\ y = Rep1y.$

La solution est : $x = 12$ et $y = 9$.

Quelques explications :
Les variables x et y ne peuvent prendre que des valeurs entières non nulles et inférieures (strictement) à 15. Il y a donc 14 possibilités. On écrit les carrés des 14 premiers entiers non nuls:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196.$$

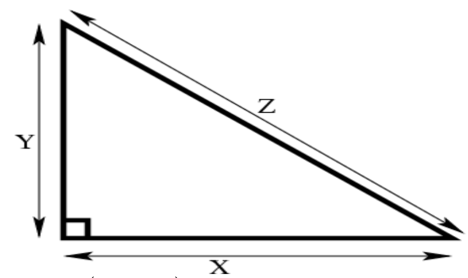
On essaye d'abord $x = 14$ alors $15^2 - x^2 = 225 - 196 = 29$. Or 29 n'est pas dans la liste, donc $x = 14$ ne convient pas.
On continue alors avec $x = 13$, $15^2 - 13^2 = 225 - 169 = 56$ qui n'est pas non plus dans la liste, donc $x = 13$ ne convient pas.
Pour $x = 12$, $15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 = 9^2 = y^2$ convient (avec $y = 9$), donc $(x = 12, y = 9)$ est une solution.
Pour $x = 11$, $15^2 - 11^2 = 104$, qui n'est pas un carré, donc $x = 11$ ne convient pas.
Pour $x \leq 10$, $15^2 - x^2 = y^2 \geq 10^2$ et on ne peut donc pas trouver yx. La seule solution est donc $x = 12,\ y = 9$.

Il existe une méthode et même un algorithme permettant de trouver toutes les solutions (voir le texte de A. Chambert-Loir ci-dessous).

De plus, ceux qui connaissent le triplet "classique" $(3, 4, 5)$ tel que $3^2 + 4^2 = 5^2$ pouvaient trouver directement la solution en remarquant que $15 = 53$, le couple $(43, 33)$ convient.

Pour aller plus loin:
Le théorème de Pythagore (580 av. J.-C. 490 av. J.-C) assure que le carré (de la longueur) de l'hypothénuse z d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés (des longueurs) des cotés opposés (x, y).

Un triplet de nombres positifs (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 = z^2$ peut ainsi être associé géométriquement à un triangle rectangle de cotés de longueurs x, y et z (voir dessin ci-contre). Cette propriété était connue des mathématiciens grecs qui connaissaient toutes les solutions (une infinité!).



On peut alors se demander s'il est possible de trouver un triplet (x, y, z) qui vérifie l'égalité (1) lorsque l'on remplace la puissance 2 par une autre. Le théorème de Fermat (1601-1665) affirme qu'il n'existe aucune solution entière à l'équation

$$x^n + y^n = z^n,$$

pour tout $n3$ ($n = 2$ est le cas précédent). Ce résultat qui avait été énoncé par Fermat en 1650 sans démonstration a été démontré en 1996 par Wiles en utilisant les outils mathématiques les plus modernes.

Piste de lecture:

- Les solutions de $x^2 + y^2 = z^2$, par A. Chambert-Loir.
  Cliquez ici - http://www.univ-orleans.fr/quizz/circle.pdf
- Démonstration géométrique du Théorème de Pythagore.
  Cliquez ici - http://www.alphaquark.com/Mathematique/TheoremePythagore.htm
- Biographie de P. de Fermat.
  Cliquez ici - http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Fermat.html

2 Cartographie

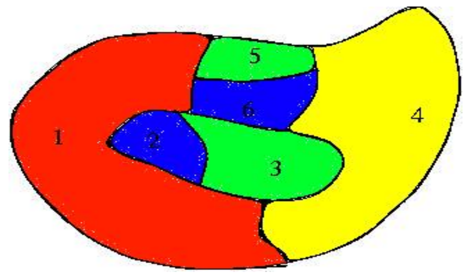
Énoncé :
Combien faut-il de couleurs différentes au minimum pour colorier la carte ci-contre, qui comporte six zones, sans que deux zones limitrophes ne soient de la même couleur ?

Votre réponse est : il faut Rep2 couleur(s).

La solution est : quatre couleurs.

Quelques explications :

Les zones 1, 2 et 3 ont deux à deux des frontières communes. Elles doivent donc être de couleur distincte. Il faut donc au moins trois couleurs. Le même raisonnement s'applique pour les zones 1, 4 et 5. De plus, la zone 3 touche à la fois les zones 4 et 5, les zones 4 et 5 ne peuvent pas être de la couleur de la zone 3. Il faut donc au moins une quatrième couleur.



Par ailleurs, quatre couleurs suffisent : en effet, on peut colorier de la même couleur les zones 2 et 5 d'une part et les zones 3 et 6 d'autre part. La bonne réponse est donc 4 couleurs.

Pour aller plus loin:
Il s'agit d'un résultat général, connu sous le nom de *théorème des quatre couleurs*, formulé en 1852 et démontré en 1976 par Appel et Haken : il faut au plus quatre couleurs pour colorier toute carte géopolitique dessinée sur un plan ou une sphère. La preuve a utilisé de façon cruciale et pour l'une des toutes premières fois, l'ordinateur. Si la carte est dessinée sur un tore (surface similaire à une chambre à air), le nombre de couleurs nécessaires peut aller jusqu'à sept. Ce problème utilise la *théorie des graphes* qui sert également à dessiner des circuits imprimés, à rationaliser des processus de fabrication...
Piste de lecture:

- Article sur "graphes" (théorie des) dans l'*Encyclopédie universalis*
- C. Berge : *Théorie des graphes et ses applications*, Gauthier-Villars, (1983).

3 Numération.

Énoncé :
écrire 177 en base 2 : $--------$.
(*Remplacer chaque* $-$ *par 0 ou 1. Exemple :* $13 = 8+4+1 = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0$. *Le nombre* 13 *s'écrit donc* 1101 *en base* 2.)

Votre réponse est : Rep3

La solution est : 10110001

Quelques explications :
On peut obtenir le résultat de façon élémentaire en considérant les *puissances successives* de 2:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.$$

Les puissances suivantes étant supérieures au nombre 177, elles ne seront pas utiles ici. On soustrait la plus grande puissance inférieure à 177. Soit $177 - 128 = 49$, et on itère le procédé. On ne peut pas soustraire 64 qui est supérieur à 49. On peut le faire avec 32, il reste $49 - 32 = 17$. On peut alors soustraire 16, il reste 1 qui peut s'écrire 2^0. On a donc obtenu la représentation de 177 en base de 2

$$177 = 128+32+16+1 = 1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0.$$

Il y a donc quatre "1" dans l'écriture de 177 en base 2 placé en position 1, 5, 6 et 8, soit

$$10110001$$

Il est également possible d'obtenir cette décomposition en réalisant une succession de divisions entières par deux. On obtient alors :

177 divisé par 2 est égal à 88, il reste	1,
88 divisé par 2 est égal 44, il reste	0,
44 divisé par 2 est égal 22, il reste	0,
22 divisé par 2 est égal 11, il reste	0,
11 divisé par 2 est égal 5, il reste	1,
5 divisé par 2 est égal 2, il reste	1,
2 divisé par 2 est égal 1, il reste	0,
1 divisé par 2 est égal 0, il reste	1.

On retrouve le résultat en lisant les restes (de la dernière colonne) dans l'ordre inverse.

Pour aller plus loin:
La base 2, où les nombres sont représentés par une suite de 0 et de 1, est utilisée dans tous les traitements automatiques de l'information, que ce soit dans les ordinateurs, les lecteurs CD, les téléphones portables... Un chiffre en base 2 est appelé un "bit", un groupe de 8 bits, tel que celui qui représente 177 est appelé un octet. La capacité de mémoire ou de stockage des ordinateurs se compte en "kilo-octets", ($2^{10} = 1024$ octets), en méga-octets (2^{20}, environ un million) voire en Giga-octets (2^{30}, environ un milliard). Il existe même des ordinateurs capables de stocker un Téra-octets (2^{40}) et cela n'est pas fini...

Les octets représentent donc des nombres (entre 0 et 255) qui eux-mêmes sont utilisés pour représenter des caractères typographiques (en utilisant par exemple les codes ASCII *American Standard Code for Information Interchage*), la musique (en utilisant le format MP3), les images (en utilisant des formats comme JPG, GIF, PNG), la vidéo (avec des formats comme MPEG)...

Les liens entre les mathématiques et l'informatique sont de plus en plus étroits. Il s'agit d'une véritable synergie : l'informatique aide les mathématiques par exemple, pour effectuer certains calculs trop fastidieux (logiciels de calcul formel), vérifier des preuves (voir Théorème des quatres couleurs) et bien sur, trouver des solutions approchées d'une équation... Les mathématiques sont également utiles à l'informatique par exemple, pour la cryptographie, assurer la confidentialité des échanges de données, le traitement des images, les méthodes pour détecter les erreurs lors du transfert d'informations....

Piste de lecture:

- Florian Cajori : *A history of mathematical notations*, Dover Publications - Chicago (1928/1993)
- Georges Ifrah : *Histoire universelle des chiffres*, 2 volumes, Ed. Robert Laffont (1994)

4 Arithmétique.

Énoncé :
Décomposer 143 en produit de nombres premiers.

(*On rappelle que les nombres premiers sont les nombres différents de 1 et n'ayant pas d'autres diviseurs que 1 et eux-mêmes. Les premiers nombres premiers sont donc 2,3,5,7,11.*).

Votre réponse est : Rep4

La solution est : 143 = 13 * 11.

Quelques explications :
Le nombre 143 n'est divisible ni par 2 (il est impair), ni par 3 (en utilisant la "preuve par 9"), ni par 5 (il ne se termine ni par 0 ni par 5), ni par 7 (le reste de la division par 7 est 3 puisque $143 = 20 \times 7 + 3$). Cependant, il est divisible par 11 et $143 = 13 \times 11$. Cette opération qui consiste à décomposer un nombre en facteurs premiers s'appelle la factorisation. Elle nécessite de connaître les nombres premiers, ce qui peut être fait en utilisant le "crible d'Erathostène" qui consiste à écrire les nombres N tels que $N * N143$ et à barrer tous les multiples de 2, puis de prendre le plus petit nombre non barré (3) et de barrer ses multiples... C'est une manière d'obtenir les facteurs premiers pouvant intervenir dans la décomposition de 143.

Pour aller plus loin:
Les grecs ont démontré diverses propriétés importantes des nombres premiers. Par exemple,

- La suite des nombres premiers est infinie. En effet, Euclide a démontré qu'on ne peut pas trouver un nombre premier qui serait plus grand que tous les autres.
- Tout nombre entier supérieur à un et qui n'est pas un nombre premier peut s'écrire comme un produit de nombres premiers. De plus, pour chaque nombre, cette décomposition en facteurs premiers est unique, si on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs.

Autant la multiplication de grands nombres n'est pas difficile (quoique fastidieuse), autant la factorisation (retrouver les facteurs premiers) est un problème complexe. Cette dissymétrie est à la base de méthodes permettant de crypter les informations (préalablement codées sous forme de nombres représentés en base 2, voir paragraphe précédent), de façon à préserver la confidentialité des communications sur les portables ou la transmission des références de cartes bancaires. La méthode RSA (initiales de Rivest, Shamir et Adleman) conçue en 1978 est sans doute la plus connue et la plus utilisée : pour être sure, elle nécessite de très grand nombres premiers (avec plusieurs centaines de chiffres). Bien qu'il soit (relativement) facile de trouver deux (grands) nombres premiers p et q et de calculer leur produit $N = pq$, il est beaucoup plus long en général de retrouver p et q à partir de N. Essayez de factoriser 10033 (qui n'est pourtant pas bien grand) pour vous en convaincre...
Piste de lecture:

- J.-P. Delahaye : *Merveilleux nombres premiers*, Belin/pour la science, (2000).
- S. Singh : *Histoire des codes secrets*, Jean-Claude Lattès, (1999).

5 Bonbons

Énoncé :
Alice achète 2 bonbons verts et 3 bonbons rouges ; elle paie 18 centimes. Bob achète 1 bonbon

vert et 2 rouges et paie 11 centimes. Combien coûte un bonbon vert ?

Votre réponse est : Rep5 centime(s).

La solution est : 3 centimes.

Quelques explications :
Les données de ce problème peuvent se traduire sous forme d'un système de deux équations (linéaires) : 2 bonbons verts et 3 rouges coûtent 18 centimes s'écrit

$$2 \times v + 3 \times r = 18,$$

1 bonbon vert et 2 bonbons rouges coûtent 11 centimes s'écrit

$$1 \times v + 2 \times r = 11.$$

En multipliant la seconde équation par 2, on obtient

$$2 \times v + 4 \times r = 22.$$

(ce qui signifie que 2 bonbons verts et 4 rouges coûtent 22 centimes). En faisant la différence avec la première équation, on trouve

$$2 \times v + 4 \times r - 2 \times v - 3 \times r = 22 - 18 = 4.$$

Donc $r = 4$, le prix d'un bonbon rouge est 4 centimes, et en reportant ce résultat dans l'une des équations, par exemple la deuxième, on trouve

$$1 \times v + 2 \times r = 1 \times v + 2 \times 4 = 11,$$

Donc $v = 11 - 8 = 3$. Le bonbon vert coûte 3 centimes.

Pour aller plus loin:
Le système d'équations considéré est appelé système linéaire. Cela peut s'écrire sous la forme condensée (on n'écrit qu'une fois les variables r et v)

ou "matricielle" suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Le problème consiste alors à savoir si ce système possède une unique solution (système dit inversible) et à la calculer. Il existe des outils très puissants pour répondre à ces questions pour des systèmes de ce type : ceux de l'algèbre linéaire (déterminant, méthode du pivot de Gauss...) Les problèmes issus de la modélisation physique (prévision météorologique, calcul de l'aérodynamisme d'une voiture ou d'un avion, construction d'un pont ou d'un immeuble...) se traduisent souvent par un grand nombre d'équations. La résolution de ces problèmes utilise des systèmes linéaires de grande taille. Les ordinateurs actuels sont capables de résoudre de tels problèmes à un million inconnues. Imaginez le problème des bonbons avec un million de bonbons différents!!!

Piste de lecture:

- Méthode du pivot selon GAUSS.
  Cliquez ici - http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/Anx2/MethPivot.html
- Applications linéaires Cliquez ici - http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/Dico/ApplFormLin.html

6 Probabilités

Énoncé :
On lance deux dés à 6 faces. Quelle est la probabilité de tirer au moins un 6 ?
(*On donnera la réponse sous forme d'une fraction* $F/36$ *où* F *est le nombre de cas favorables sur les* 36 *combinaisons possibles*.)

Votre réponse est : $F =$ Rep6

La solution est : F=11/36

Quelques explications :
La première méthode consiste à regarder parmi les 36 combinaisons possibles celles qui contiennent au moins un six. Dans le tableau ci-dessous, chaque ligne correspond à une valeur du premier dé et chaque colonne à celle du second. Les croix (X) marquent les couples ayant au moins un 6. Il y en a 11.

	1	2	3	4	5	6
1						X
2						X
3						X
4						X
5						X
6	X	X	X	X	X	X

Pour la deuxième méthode, il s'agit de regarder les cas défavorables, c'est-à-dire où il n'y a aucun 6 ou encore, de façon équivalente, où ni l'un ni l'autre des deux dés ne donne 6. Il y a 5 chances sur 6 de ne pas avoir un 6 pour un dé. Donc, pour deux dés, il y a $5 \times 5 = 25$ cas (défavorables) sur $6 \times 6 = 36$ possibilités de n'avoir aucun 6. Il y a donc $36 - 25 = 11$ cas favorables.

Pour aller plus loin:
Les probabilités sont un domaine très actif des mathématiques dont l'origine remonte au $XVIIIeme$ siècle (vous pouvez consulter le texte sur "Le Chevalier Méré"qui se posait un problème très proche de la question posée). Les Probabilités sont utilisées par exemple en mathématiques financières (pour essayer d'estimer les risques d'un investissement) ou en mécanique statistique (pour étudier le comportement d'un très grand nombre de particules et en déduire des propriétés physiques observables).

Piste de lecture:

- Le 'Chevalier de Méré' par S. Méléard. Cliquez ici - http://www.univ-orleans.fr/quizz/proba.pdf
- Biographie de B. Pascal.
  Cliquez ici - http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Pascal.html
- I. Ekeland : *Le chaos*, Flammarion, collection "Dominos", (1995).
- G. Pagès, C. Bouzitat *En passant par hasard*, Vuibert, (2000).

Votre score est SCORE (sur 6)

En espérant que ce QUIZZ MATH vous aura intéressé et en vous donnant rendez-vous l'an prochain, bien cordialement,

l'équipe du QUIZZ MATH 2002.
email : quizz@acm.emath.fr

Remerciements : nous remercions tous ceux qui ont aidé à ce projet et dont la liste peut être consultée sur la page `http://www.univ-orleans.fr/quizz/equipe.php` .